

Un exemple de calcul de l'évolution d'une population.

Pour mieux comprendre la notion d'état limite d'une pyramide des âges, observée par simulation, nous déterminons par le calcul comment évolue une population fictive d'insectes, répartie selon trois périodes d'âges de durées égales. L'hypothèse faite est que les taux de natalité et de survie à chaque période de vie de ces insectes reste constante au cours du temps.

Plus précisément :

- une période de jeunesse, avec un taux de reproduction nul et un taux de survie $b = 0.3$.
- une période de maturité, avec un taux de reproduction $a = 4$ et un taux de survie $c = 0.5$.
- une période de vieillesse, avec un taux de reproduction $d = 0.5$ et un taux de survie nul.

On suppose que chaque période a la même durée, que nous prendrons comme unité de temps.

On note $P_i(n)$, l'effectif de la population qui, à la date n , est dans la tranche i , $i = 1, 2, 3$.

On a alors les équations d'évolution suivantes :

$$P_1(n+1) = 4 P_2(n) + 0.5 P_3(n)$$

$$P_2(n+1) = 0.3 P_1(n)$$

$$P_3(n+1) = 0.5 P_2(n)$$

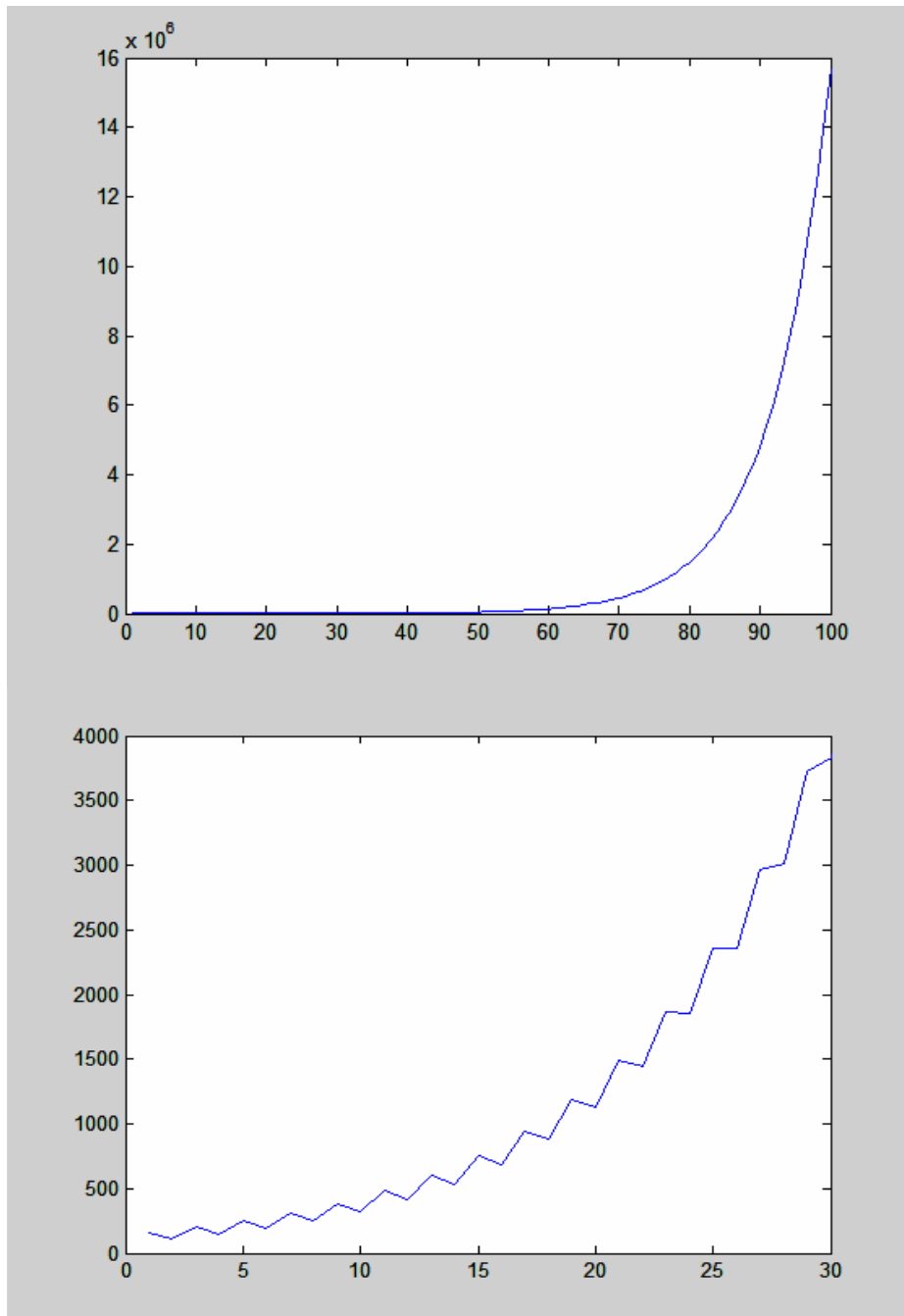
La taille de la population l'année n est :

$$T(n) = P_1(n) + P_2(n) + P_3(n)$$

Nous allons regarder comment évolue la taille de la population au cours du temps et comment évoluent les proportions de la population dans chaque tranche d'âge.

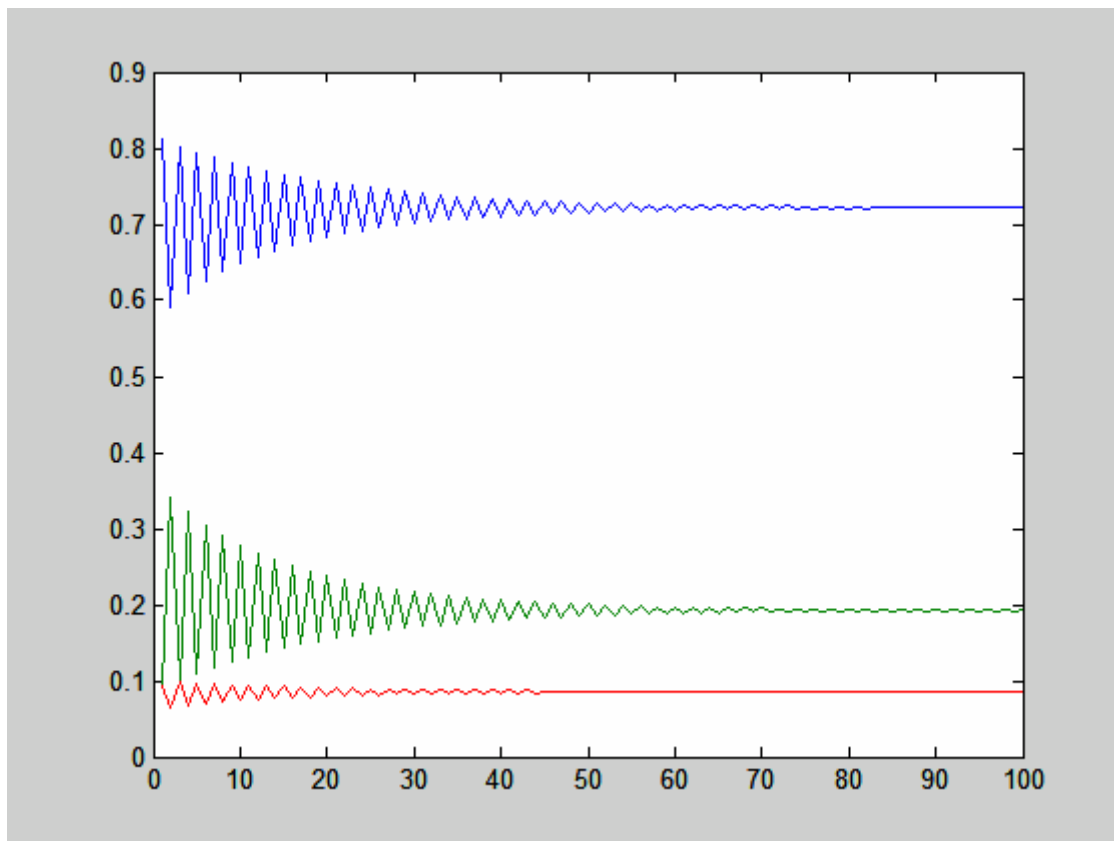
On part d'une population vérifiant $P_0(1) = 50$, $P_0(2) = 30$, $P_0(3) = 20$.

Sur la figure ci-dessous, qui décrit l'évolution de la taille de la population, on observe une croissance forte en dents de scie sur les premières périodes. Etant donné le fort taux de reproduction à la période 2, il n'est pas étonnant que la croissance de la population soit élevée. Elle passe de 100 à 16 millions en 100 ans.



Taille de la population pour les périodes 1 à 100, avec un zoom entre 1 et 10 .

On observe aussi (voir figure ci-dessous) que les proportions dans chaque tranche d'âge après une période d'oscillation se stabilisent. Comment expliquer ce phénomène ?



Evolution temporelle des proportions d'individus dans chacune des trois tranches d'âge. En bleu, évolution de la proportion des effectifs dans la première période, qui converge vers 0,72, en vert pour la deuxième période (convergence vers 0,19), en rouge pour la troisième (qui converge vers 0,08).

Nous allons faire ici les calculs théoriques qui expliquent les phénomènes observés.

Les équations permettant de passer de $\mathbf{P}(n)$ à $\mathbf{P}(n+1)$ peuvent s'écrire matriciellement. On note $\mathbf{P}(n)$ le vecteur colonne dont les composantes sont $(P_1(n), P_2(n), P_3(n))$. On a alors¹ :

$$\mathbf{P}(n+1) = \mathbf{M} \mathbf{P}(n)$$

D'où :

$$\mathbf{P}(n) = \mathbf{M}^n \mathbf{P}(0)$$

où la matrice \mathbf{M} s'écrit :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0.5 \\ 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice admet trois valeurs propres :

$$\lambda_1 = 1.1255 \quad \lambda_2 = -1.0627 \quad \lambda_3 = -0.0627$$

¹ Les matrices et les vecteurs sont en caractères gras.

Soient V_1, V_2, V_3 , trois vecteurs propres associés, dont la somme des composantes vaut 1.

Le phénomène remarquable est que les trois composantes de V_1 , données ci-dessous, sont de même signes :

$$0.7220, 0.1925, 0.0855$$

On peut écrire :

$$P(0) = \alpha V_1 + \beta V_2 + \gamma V_3$$

Comme V_1, V_2, V_3 sont trois vecteurs propres, on a :

$$P(n) = M^n P(0) = \lambda_1^n \alpha V_1 + \lambda_2^n \beta V_2 + \lambda_3^n \gamma V_3$$

Soit encore :

$$P(n) = \lambda_1^n \left(\alpha V_1 + \frac{\lambda_2^n}{\lambda_1^n} \beta V_2 + \frac{\lambda_3^n}{\lambda_1^n} \gamma V_3 \right).$$

Comme λ_1 est la valeur propre de plus grande valeur absolue, lorsque n tend vers l'infini :

$$P(n) \approx \lambda_1^n \alpha V_1.$$

Pour des petites valeurs de n , les composantes $\lambda_2^n \beta$ et $\frac{\lambda_3^n}{\lambda_1^n} \gamma$ de $P(n)$ sur V_2 et V_3 ne sont pas négligeables devant $\lambda_1^n \alpha V_1$. Comme λ_2 et λ_3 sont négatives, cela explique les oscillations observées au début des graphes de la figure 9.

La taille de la population vérifie pour n grand :

$$T(n) \approx \lambda_1^n \alpha$$

La distribution $P'(n)$ des éléments dans chaque tranche d'âge à la date n vérifie :

$$P'(n) = (1/T(n)) P(n) \approx V_1$$

On a ainsi démontré, dans l'exemple considéré, l'existence d'une distribution limite selon les tranches d'âge est :

$$P'_\infty = V_1.$$

On notera que si $P(0) = V_1$, alors :

$$P(1) = \lambda_1 V_1 \quad P(n) = \lambda_1^n V_1 \quad T(n) = \lambda_1^n.$$

Dans le cas de populations humaines, les calculs pour les projections de pyramides, avec des hypothèses de taux de natalité et de survie constants, d'absence d'immigration et d'émigration

peuvent toujours s'écrire avec le formalisme matriciel considéré ici. Cependant, la matrice associée à la pyramide n'est pas toujours diagonalisable et a souvent des valeurs propres complexes. Mais en général, il y a une valeur propre réelle simple de plus grand module, associée à un vecteur propre dont les composantes ont toutes le même signe et on adapte les calculs ci-dessus.

Comme le montre le texte ci-dessous, la « méthode des composantes » appliquée ici dans une version simple (nous avons travaillé à taux de natalité et de mortalité invariant au cours du temps), a, dans son principe soulevé de nombreuses questions :

L'entre-deux-guerres a vu l'apparition, la diffusion et l'adoption universelle de la méthode dite " des composantes " pour le calcul des projections de population. On a fait jouer l'interaction entre la structure par sexe et âge de la population et les taux par sexe et âge des composantes du mouvement démographique (la mortalité, la fécondité et la migration) pour indiquer l'évolution future la plus vraisemblable des populations nationales. Mais, dès le début, cette approche fondée sur l'analyse démographique a été concurrencée par une résurgence de la théorie selon laquelle l'effectif futur de la population est déterminé par une loi. Cette croyance s'appuyait sur la (re)découverte d'un modèle homéostatique, la " loi logistique " de la croissance démographique. L'approche logistique des projections de population a été développée et préconisée par le généticien américain Raymond Pearl dans les années 1920. Elle a alors supplanté la loi malthusienne de la croissance géométrique, qui avait régné au XIXe siècle. La décennie des années 1920 vit donc s'affronter l'approche " par la loi logistique " et l'approche " par l'analyse démographique ". La discussion sur les méthodes de projection de population opposa tout d'abord la biologie et la démographie. La controverse se développa dans des congrès, des articles et des ouvrages, aux frontières du domaine qui avait vu naître les innovations techniques. La méthode des composantes trouva aisément sa place dans le champ de la planification. Elle permettait une compréhension précise des facteurs qui expliquent la dynamique de la population, et elle fournissait un profil détaillé de la structure par sexe et âge de la population future.

Extrait de « Loi mathématique ou conjecture spéculative ? Un débat des années 1920 sur la méthodologie des projections démographiques ». De Gans Henk A, in INED, Population n° 1, 2002 - page 91