

Une entreprise pharmaceutique fabrique les comprimés d'un médicament dans deux machines distinctes A et B. Après une étude statistique, elle constate que :

- la masse d'un comprimé qui sort de la machine de fabrication A suit une loi normale de paramètres $\mu = 80,00$ mg et $\sigma = 0,025$;
- la masse d'un comprimé qui sort de la machine de fabrication B suit une loi normale de paramètres $\mu' = \mu = 80,00$ mg et $\sigma' = 0,020$.

On a défini une plage de tolérance pour la masse d'un comprimé qui est $[79,95;80,05]$.

Un comprimé dont la masse est en dehors de cette plage est détruit.

1/ L'entreprise fabrique chaque année 2 millions de comprimés de ce médicament : la moitié est produite par la machine A, l'autre moitié par la machine B.

- a) A combien peut-on estimer le nombre de comprimés sortant de la machine A qui seront détruits ?

Si X est la variable aléatoire associée à la masse d'un comprimé qui sort de la machine A, alors $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu = 80; \sigma = 0,025)$.

D'après le cours, $P(79,95 \leq X \leq 80,05) = P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,9544$ ainsi le nombre théorique de comprimés qui ne seront pas détruits est de 954 400 et donc 45 600 seront théoriquement détruits.

- b) A combien peut-on estimer le nombre de comprimés sortant de la machine B qui seront détruits ?

Si Y est la variable aléatoire associée à la masse d'un comprimé qui sort de la machine B, alors $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu' = 80; \sigma' = 0,02)$. On déduit :

$$P(79,95 \leq Y \leq 80,05) = P(\mu' - 2,5\sigma' \leq Y \leq \mu' + 2,5\sigma') = P(-2,5 \leq Z \leq 2,5)$$

avec $Z = \frac{Y - \mu'}{\sigma'} \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$.

$$P(-2,5 \leq Z \leq 2,5) = 2 \times P(Z \leq 2,5) - 1 = 2 \Phi(2,5) - 1 \approx 0,9875$$

Ainsi, le nombre théorique de comprimés qui ne seront pas détruits est de 987 500 alors que 12 500 comprimés seront théoriquement détruits.

2/ La fabrication d'un comprimé coûte 0,3 € Un comprimé est revendu dans le commerce 0,35 € Tous les comprimés sont vendus. Sachant que la machine B coûte 50 000 € de plus que la machine A, au bout de combien d'années la machine B sera-t-elle rentabilisée ?

Bénéfice annuel issu de la machine A : $954\,400 \times 0,35 - 1\,000\,000 \times 0,3 = 34\,040$ €

Bénéfice annuel issu de la machine B : $987\,500 \times 0,35 - 1\,000\,000 \times 0,3 = 45\,625$ €

Chaque année la machine B rapporte 11 585 € de plus.

Elle sera donc rentabilisée au bout de 5 ans.

Remarque générale : toutes les données numériques sont théoriques et donnent les ordres de grandeur de ce à quoi on peut s'attendre !