

Objectif du TD : étude des inégalités de répartition des revenus des ménages et comparaison avec la répartition du patrimoine , mise en évidence à l'aide de graphiques et d'indicateurs (courbes de Lorenz et coefficient de Gini )

Les données, tableaux et graphiques proviennent de l'étude de l'INSEE : « les revenus et patrimoines des ménages, édition 2006 » d'après l'enquête 2003-2004.

**Partie A : revenus disponibles des ménages : construction d'une courbe de Lorenz**

**I- caractéristiques de dispersion d'une série statistique : médianes , quartiles , déciles .**

Les données collectées lors d'une enquête sont regroupées en vue d'une étude statistique pour être analysées et commentées.

Un graphique de base : le regroupement par classe

Tableau des effectifs et des fréquences

$x_i$	[ ; [	[ ; [	....	[ ; [
effectifs : $n_i$				
fréquences : $f_i$				

remarque : sur ce graphique de l'INSEE, les effectifs sont ramenés en pourcentage de l'effectif total ( c'est-à-dire du nombre total de ménages), en ordonnée sont donc représentées les fréquences de la série statistique. (Les données sont regroupées par ordre croissant du revenu.)

Pour mettre en évidence les caractéristiques de dispersion de la série statistique, on détermine la médiane, les quartiles et les déciles.

Pour cela, on établit le tableau des fréquences cumulées croissantes ou des effectifs cumulés croissants ( obtenu directement à l'aide de logiciels lorsqu'il y a de nombreuses données )

$x_i$	[ ; [	[ ; [	....	[ ; [
fréquence : $f_i$				
fréquences cumulées				100%

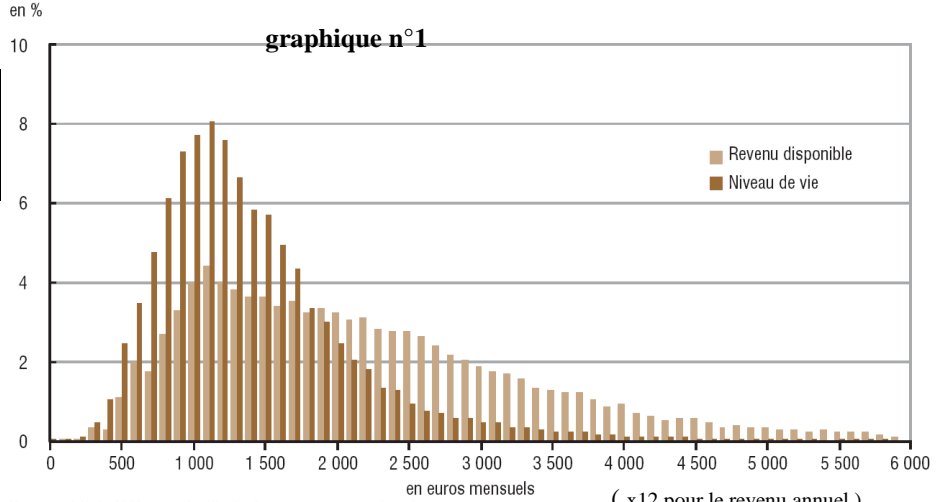
A l'aide de la lecture du graphique ci-contre, compléter le tableau suivant :

Premier décile D1	Premier quartile Q1	médiane	Troisième quartile Q3	Dernier décile D9

Attention : D1,Q1, Me, Q3 et D9 sont des valeurs du caractère de la série statistique.

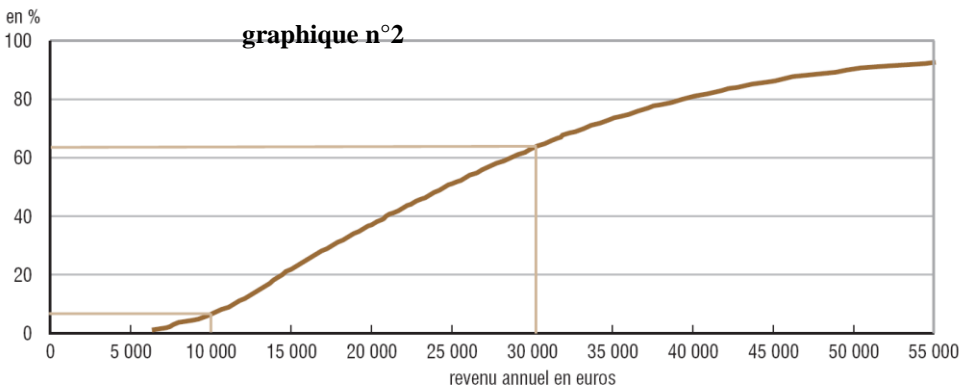
Construire le diagramme en boîte appelé aussi « boîte à moustache » associé à cette série statistique

**2. Distributions des niveaux de vie et du revenu disponible mensuel des ménages en 2004**



Note : au-delà de 6000 euros, les distributions ne sont pas représentées.  
Lecture : le pas de l'histogramme est de 100 euros ; la hauteur de la barre de coordonnées  $n$  en abscisse est donc égale à la proportion de revenus ou niveaux de vie compris entre  $n$  et  $n+100$  euros : ainsi 5,7 % des individus ont un niveau de vie mensuel compris entre 1 500 euros et 1 600 euros et 3,6 % des ménages ont un revenu disponible compris entre 1 500 euros et 1 600 euros.  
Source : Insee-DGI, enquête Revenus fiscaux 2004.

**1. Répartition des revenus disponibles des ménages en 2004**



Champ : ménages dont le revenu déclaré au fisc est positif ou nul et dont la personne de référence n'est pas étudiante.  
Lecture : 57 % des ménages ont en 2004 un revenu disponible annuel compris entre 10 000 et 30 000 euros.  
Source : enquête Revenus fiscaux 2004, Insee-DGI.

En math, on demandera souvent la valeur de l'écart interquartile :  $Q3-Q1 =$  \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_  
Interprétation :

En SES , on demandera plutôt les rapports interdéciles : exemple  $\frac{D9}{D1} =$  \_\_\_\_\_  
Interprétation :

**Rappel : ne pas confondre moyenne et médiane !**

	2000	2001	2002	2002 rétropolée <sup>1</sup>	2003	2004
Revenu disponible médian (euros constants)	23 450	24 000	24 390	24 930	24 750	24 600
Revenu disponible moyen (euros constants)	27 600	28 200	28 480	29 070	29 010	28 340
Rapport interdécile (D9/D1)	4,5	4,4	4,4	4,4	4,4	4,3

Que signifierait le constat d'un revenu moyen supérieur au revenu médian ?  
et l'inverse ?

## II- Evaluation de la dispersion du revenu disponible en utilisant les déciles : construction de la courbe de Lorenz

On adopte un autre point de vue pour les graphiques : le revenu est fonction des pourcentages des déciles correspondants.

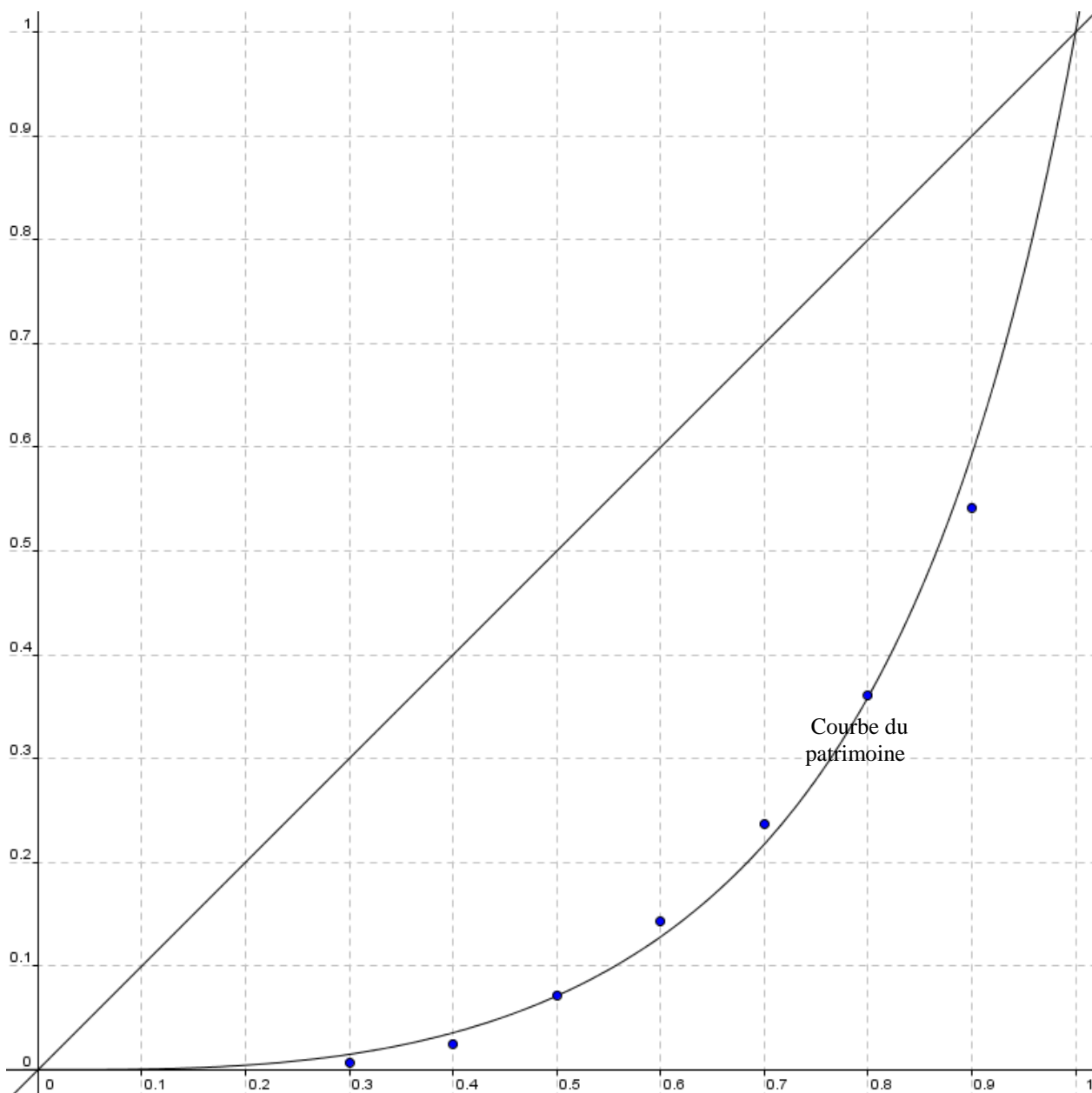
Revenu disponible en 2004 par décile

décile	limite supérieure du revenu disponible annuel ( en € )	pourcentage de la masse totale des revenus disponibles reçu par chaque décile	Cumul du pourcentage de la masse totale des revenus disponibles reçu par chaque décile
D1	11 477	3	3
D2	14 408	4,5	7,5
D3	17 581	5,5	
D4	20 942	6,7	
D5	24 599	7,9	
D6	28 623	9,2	
D7	33 171	10,7	
D8	39 356	12,5	
D9	49 554	15,2	
supérieur à D9		24,8	

Références : 24 837 000 ménages pour une masse totale de 718 660 millions d'euros.

Vérifier la valeur de D4 et D7 sur le graphique n°2.

Compléter la quatrième colonne du tableau ci-contre, puis construire en rouge dans le graphique ci-dessous les points correspondants. ( première colonne ( cumulés des % des déciles ) ; quatrième colonne ( cumulés des % de la masse totale ) ), et joindre les points par des segments.



Lecture : Compléter à l'aide du tableau et du graphique les phrases suivantes :

En 2004, les 10% des ménages français qui avaient les revenus les plus bas touchaient au plus ..... euros et totalisent ....% du revenu total alors que si la répartition était égalitaire, ils toucheraient .... % du revenu total soit un écart de .....

En 2004, les 10 % des ménages qui avaient les revenus les plus élevés touchaient au moins .....euros et totalisent .....% du revenu total.

En 2004, la moitié de la masse totale des revenus disponibles est détenue par ..... % de la part des ménages qui ont les revenus les plus faibles et ceci signifie donc que 28% des ménages ayant les revenus les plus élevés détiennent ..... % de cette masse totale des revenus.

La seconde courbe de Lorenz, celle qui est la plus éloignée de la droite d'équirépartition ou diagonale correspond à ..... et permet de montrer que les 20% des français qui ont le patrimoine le plus faible détiennent seulement ..... % de la masse totale du patrimoine .

De même les 20% dont les revenus sont les plus élevés détiennent .....% de la totalité du patrimoine.

On peut donc ici mettre en évidence que la part du patrimoine détenue par les 20 % les plus riches est ..... fois plus importante que la part des 20% des ménages ayant les revenus les plus faibles.

**Partie B : étude de courbes de Lorenz , définition du coefficient de Gini,**

**Interprétation en SES :**

Dans ce type de graphique où les abscisses sont les déciles ( cumul croissant de fréquences ) et en ordonnées les parts d'une grandeur étudiée (cumul croissant de pourcentages ) , les courbes obtenues s'appellent des **courbes de Lorenz**. Elles mettent en évidence la répartition de la grandeur étudiée pour permettre des comparaisons :

Quelle est l'interprétation de la diagonale du graphique ?

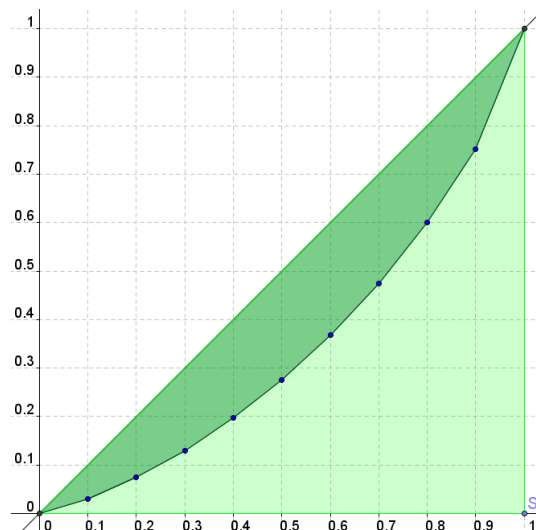
Quelle interprétation peut-on donner de l'éloignement de la courbe de Lorenz des revenus disponibles avec la diagonale ?

Comparer ( à l'aide des tableaux ou des graphiques ) les valeurs des deux courbes de Lorenz du revenu et du patrimoine d'abord de façon générale puis pour D2 , D5 et D8 faire une phrase et interpréter .

*Répartition du patrimoine brut en France en 2003*

déciles	Part du patrimoine total possédée par les ménages au seuil indiqués (en %)
10%	0
20%	0,15
30%	0,7
40%	2,5
50%	7,2
60%	14,3
70%	23,7
80%	36,1
90%	54,2

*Note : le patrimoine détenu comprend les biens immobiliers, les actifs financiers ainsi que le patrimoine professionnel pour les actifs indépendants.*



On définit ainsi un nouvel indicateur : **le coefficient de Gini**

Le coefficient de Gini noté souvent  $\gamma$  est égal au rapport des deux aires :

$$\gamma = \frac{\text{aire de la partie vertfonce}}{\text{aire du triangle OAB}}$$

Propriétés : Plus l'écart entre la courbe et la droite d'équirépartition est grand et plus le coefficient de Gini est grand.

Ce coefficient compris entre 0 et 1 permet de comprendre que plus on se rapproche d'un coefficient proche de 0 plus la répartition est ..... ; plus on se rapproche de 1 plus la répartition est .....

Ce nombre ( un indicateur ) permet ainsi de mettre en évidence l'évolution des inégalités sur une période , la comparaison entre pays ou entre des catégories différentes ...

### Interprétation en math

Une courbe de Lorenz représente une fonction  $f$  vérifiant les trois conditions suivantes :

- $f$  est définie sur l'intervalle  $[0, 1]$  (attention aux pourcentages compris entre 0 et 1)
- $f$  est croissante sur  $[0, 1]$  et  $f(x) \geq x$  pour  $x \in [0, 1]$
- $f(0) = 0$  et  $f(1) = 1$

En utilisant un tableur, ajustons les données à l'aide **d'un ajustement polynomial pour le revenu disponible 2004**. ( il existe bien d'autres ajustement pour une courbe de Lorenz , voir exercices )

On obtient :  $f(x) =$

On va supposer que cette fonction satisfait aux conditions ci-dessus. A l'aide du tableau de valeur de la calculatrice, construire en vert la courbe représentant  $f$  en plaçant des points de 0,05 en 0,05 sur l'axe des abscisses. Qu'observe-t-on ?

Calculer l'aire située sous la courbe en utilisant une intégrale, puis calculer le coefficient de Gini correspondant :  $\gamma_R$

De même **la courbe représentant du patrimoine** peut être modélisée par la courbe représentant la fonction :

$$g(x) = \frac{1}{e^{0,6}} x^3 e^{(0,6x^4)} \quad \text{pour } x \in [0, 1]$$

Calculer l'aire située sous la courbe, puis calculer le coefficient de Gini correspondant :  $\gamma_P$

Comparer les deux coefficients de Gini

### Partie C : conclusion ( explication des inégalités en SES)

Synthèse :

- $\Rightarrow$  L'étude de ces deux courbes de Lorenz met en évidence une répartition inégalitaire des revenus et du patrimoine dans la société française dans les années 2004, avec des différences notables à prendre en compte.
- $\Rightarrow$  La répartition des revenus est .....inégalitaire que celle du patrimoine ce que les courbes de Lorenz permettent de montrer : en effet celle qui est la plus éloignée de la diagonale est celle .....
- $\Rightarrow$  C'est aussi celle qui a un coefficient de Gini le plus proche de .....

Raisons permettant de comprendre cet écart :

- $\Rightarrow$
- $\Rightarrow$
- $\Rightarrow$

Remarque : d'autres graphiques peuvent être utilisés pour comparer des inégalités: type strobiloïdes ( page 143 du manuel ), chacun avec des avantages et des inconvénients et donc se complétant .