# Le choix caméléon

**Objectif**

Etudier un modèle probabiliste dans un cas simple, et confronter résultats de calculs et intuition.
Information a priori et prévision.

Le maire d'une ville souhaite avoir l'avis des habitants pour certains aménagements concernant la fibre optique. Une question est posée dont la réponse est oui (O) ou non (N) Toute personne qui a fait son choix inscrit sa réponse à la mairie.
Pour répondre, les habitants se promènent dans la ville et interrogent les passants au hasard. Ils décident de répondre la même chose que le premier passant rencontré qui a déjà fait son choix. Autrement dit, on suppose les choix séquentiels et que le ($n$+1)-ième habitant qui fait son choix a la même probabilité 1/$n$ de rencontrer chacune des personnes ayant déjà fait le leur.

Au début de ce processus de *choix caméléon*, deux personnes ont un avis : un O, l'autre N.

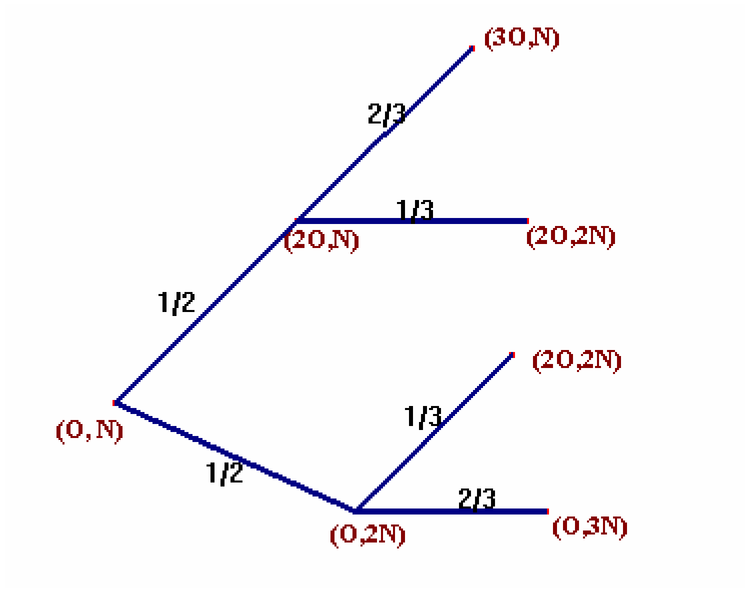
Le maire de la ville est tracassé : il pense que lorsque tous les habitants auront fait leur choix, la fréquence de O sera proche de 0,5, ce qui n'est pas agréable pour prendre une décision. Il se dit qu'inversement, si la fréquence de O est nettement supérieure à 0,5, alors cela correspondra à un vrai choix et non a une population qui *vote caméléon.*

On va essayer de voir si l'intuition de ce maire est fondée.

1- Si $n$ personnes ont fait leur choix dont $k$ pour O et $n$-$k$ pour N, quelle chance (ou probabilité) a-t-on que le choix suivant soit pour O ?

2- Faire un arbre de probabilité pour regarder ce qui peut se passer lorsque 4 personnes auront fait leur choix.

Rep :

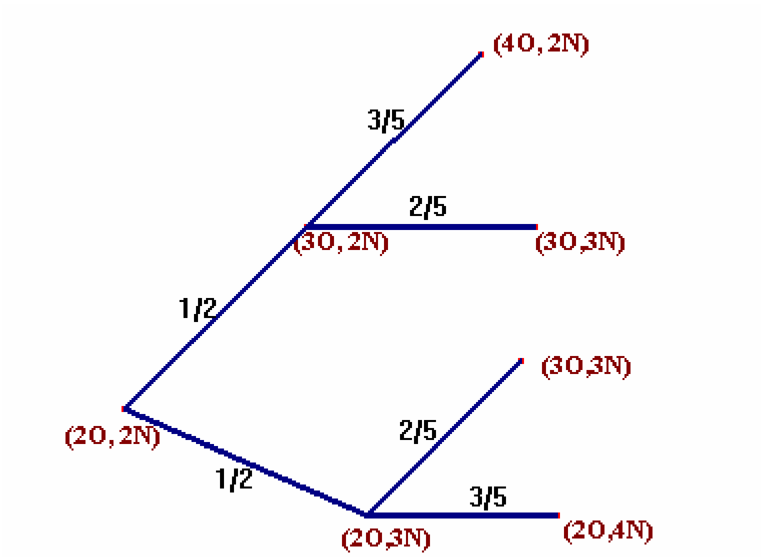



3- Lorsque 4 personnes auront fait leur choix, quelle sont les probabilités que la fréquence de O soient respectivement 0,25 ,0,50 , 0,75 ?

*Rep : les 3 possibilités sont équiprobables : aucun avantage en terme de probabilité à la situation (2O,2N).*
*L'intuition du maire ne semble pas si fondée que cela…*

4- Toute personne qui a fait son choix va l'inscrire à la mairie. Le maire qui regarde tous les jours observe les résultats régulièrement et voit que parmi les 4 premiers choix 2 ont choisi O. Faire un arbre a partir de cette situation pour étudier ce qui peut se passer quand 6 personnes auront fait leur choix ; quelle est dans ce cas la probabilité que le nombre de choix pour O soient respectivement 2,3,4,5 ?

Rep :




Les probabilités qu'il y ait 2,3,4 choix O sont respectivement 0,3 0,4 et 0,3. La fréquence 0,5 pour le nombre de choix O est légèrement favorisée en terme de fréquence.

## Pour conclure

**La prévision**, en termes de probabilité de la fréquence de O, que l'on peut faire pour le choix de $R$ personnes **est fonction de l'information dont on dispose** :

**-si on ne connaît que ce qui se passe au niveau des deux premières personnes** (l'information est pauvre), celles-ci ayant des avis différents, alors, quelle que soit la taille $R$ de la ville, les probabilités d'avoir comme fréquence de O les valeurs ($1/R$, $2/R$,…$(R-1)/R$) sont toutes égales à $1/(R-1)$ (voir annexe).

L'intuition du maire en ce cas n'est pas fondée. Les situations où la fréquence de O est proche de 0,5 ne sont pas favorisées. A priori, avec cette procédure de choix caméléon entre O et N, les $R$-1 fréquences possibles pour les $R$ habitants ont une égale probabilité de se réaliser.

Cette procédure de choix caméléon est évidemment caricaturale, mais le résultat obtenu montre aussi que si on obtient une fréquence élevée de oui, sans savoir si les gens ont été *caméléon* ou pas, on ne peut pas pour autant l'exclure.

Remarque : si les deux premiers avis sont identiques, alors tous les habitants feront le même choix, la situation est déterministe.

**-Si on a une information plus riche, c'est à dire si on connaît le résultat pour *n* personnes *n*>2,** les probabilités des fréquences possibles pour les $R$ habitants sont plus difficiles à calculer et ne sont plus toutes égales : avec plus d'information, la prévision devient envisageable (le pire des cas pour la prévision étant l'équiprobabilité de la situation précédente).

**Annexe**

Soit $p_n(k)$ la probabilité d'avoir $k$ choix O parmi $n$, $k$=1,..,$n$-1.

On peut écrire, pour $n>2$ : $$p_n(k) = \frac{n-1-k}{n-1} \times p_{n-1}(k) + \frac{k-1}{n-1} \times p_{n-1}(k-1).$$

Si $p_2(1)=0,5$ et qu'on suppose que jusqu'au rang $n$-1, il y a équiprobabilité des cas possibles, alors :

$$p_{n-1}(k)=1/(n-2),\ k=1,\dots,n-2$$

et : $$p_n(k) = \frac{1}{n-2} \times \frac{n-1-k+k-1}{n-1} = \frac{1}{n-1}.$$